# フィボナッチ数を背景とする教材の考察

An Investigation of Teaching Materials Related to Fibonacci Numbers

城野　真民　　北山 秀隆
Masami JONO　　Hidetaka KITAYAMA
（和歌山大学 大学院教育学研究科）　（和歌山大学教育学部）

2017 年 7 月 26 日受理

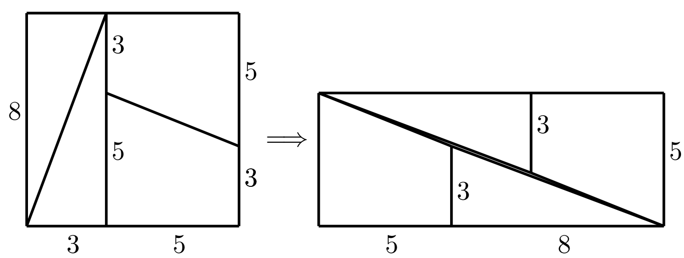
本稿では, フィボナッチ数に関連のある図形の並び替えを題材とした教材について考察する. この教材自体はよく知られているものだが, 著者のうちの一人が実際に授業したときの経験を踏まえ, 整理し, まとめる. また, その背景にある数式を拡張し, その教材化についても考察する.

## 1　序

フィボナッチ数列にはさまざまな関係式があり, 数え切れないほどの数式が成り立っている. また, 数式のみに限らず, フィボナッチ数は自然界の中にもさまざまなところで関わりがある. フィボナッチ数の奥深さを実感し, 魅了される人も少なくない. 本稿では, そのような不思議な数字を用いた不思議な現象について子どもたちと一緒に考えていくことのできる教材について考察し, これを発展させていく.

## 2　チョコレート問題

次のような図形の並び替えは有名である. 本稿では, これを「チョコレート問題」と呼ぶこととする.



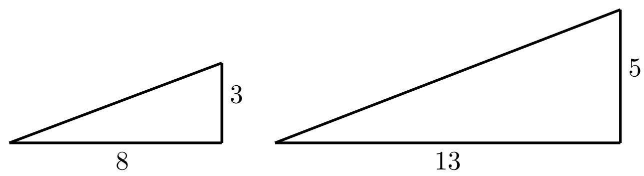

1 辺の長さが 8 の正方形を上の左図のように切り分け, 上の右図のような長方形のように並び替える. 上の図では長方形の中に隙間が生じているが, 実際に, 子どもたちに方眼紙を渡し, 同じようにこの図形を作らせると, 現物は目の錯覚により, ほぼ隙間なく長方形のように見える. ここで切り分けたものを並び替える前と後で面積を比較してみると

$$\text{正方形} = 8^2 = 64,\ \text{長方形} = 13 \cdot 5 = 65$$

となり, 同じ図形を並び替えたはずが, 並び替えると面積が 1 増えたように感じる. 面積が 1 増えた原因としては, 上記にも述べたが長方形の内側に生じた隙間である. 上図の正方形のように切り分けて並び替えたが, 実はこの長方形の対角線の直線の傾きが異なる. 下図の直角三角形の斜辺の傾きを調べると

$$\text{左の直角三角形} = \frac{3}{8},\ \text{右の直角三角形} = \frac{5}{13}$$

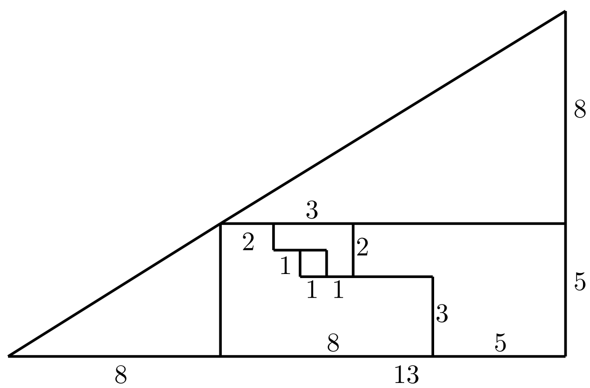
である. このように傾きが異なるため, 長方形に隙間が生じ, 面積 1 の誤差が現れた.




ここで, 子どもたちにどうしてこのような現象が起こったのかを個人でまず考え, しばらくしてからグループで考えてもらう. おもしろ算数・数学教室で実際にした講義のときの子ども達の様子では, 図形に自分で補助線を入れて図形を分析したり, 方眼紙を用いて正確に並び替えたりすることで誤差があるのかを調べようとする姿勢を見かけた. この教材は, ある物事を分析し原因を突き止める力を身につけることに適している教材の一つだと考えられる.

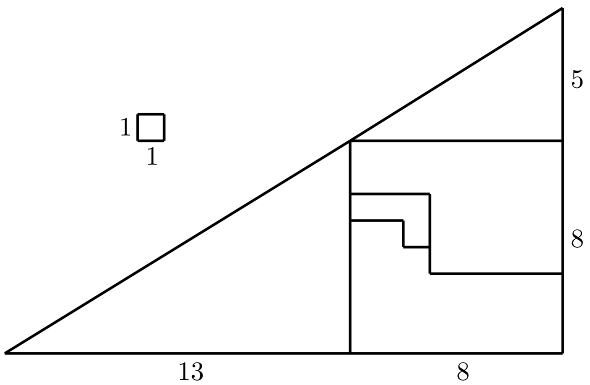
## 3　直角三角形の並び替えから

先ほどのチョコレート問題とは少し図形を変え, 三角形のときも不思議な現象が起こる. 次の下図を用いる.




これは, 底辺を 8, 高さを 5 とした直角三角形と底辺を 13, 高さを 8 とした直角三角形と横 13, 縦 5 の長方形を合わせたものである. また, 上の図のように長方形の中を切り分け, 2 つの直角三角形を入れ替えて, 切り分けたものを下図のよう

に並び替える.




同じ図形を並び替えるので, 余ることは起こりえないのだが, 何故か面積１の正方形が１つだけ余ってしまう. 子ども達は, 大きい直角三角形だと勘違いしてしまうが, 実はこの大きい直角三角形の斜辺は, 一直線ではないので, 三角形に見えるが四角形である. そのため, 並び替えたら誤差として面積１のものが余りとして出てくるということがこの現象の理由である.

これを子ども達の前で並び替え, 面積１だけ余ることを紹介すると, 興味を持って何故そのようなことが起こるのかを考えていた. 補助線を引いて図形を分解しながら調べる子どももいれば, それぞれの小さい直角三角形や長方形の面積を求めて, 並び替える前後でどのような変化があるのかを調べる子どもがいるなど, 様々な子どもの考え方を私達自身も学ぶことができた.

## 4　これらの教材の背景

チョコレート問題や直角三角形の並び替えでの違いとしてあげられることは, 視覚化できるかどうかである. チョコレート問題は, まず面積を計算し, 誤差があることを発見した流れであるのに対して, 直角三角形の並び替えでは, 指定の切り分けをし, 並び替えることで面積の変化が計算せずとも目に見える形で現れる. そのため, 面積を学習していない子どもに対しても視覚的に不思議な現象が起こったことを把握することができ, 興味を抱くことにつながるため, 直角三角形の並び替えの方が少し取り扱いやすいと感じられた.

これらの教材は, 元の図形を切り分けて並び替えても面積は変わらないという考えを持つ子ども達にとっては, 目の前で面積が変化するような現象を見て, 驚きを隠せない. そのため, 何故そのようになるのか気になることで, 興味を持って自分から考えようとすることに繋がる. 子ども達が自主的に取り組ませる工夫として, 子どもの固定概念を覆すようなトリックを仕組ませておくことは大切である. 並び替えて面積が変化する「チョコレート問題」や「直角三角形の並び替え」の教材は, そういった点で, 子どもにとって難しいものではなく単純で, 取り組みやすいものである.

上記の並び替えの問題で共通なことは, ともに $5, 8, 13, 21$ のようなフィボナッチ数列が現れていることである. また, 本稿で取り上げた教材の背景には「カッシーニの公式」という有名な関係式が存在している.

**定義 4.1.** 次の数列をフィボナッチ数列とする.

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 |

**定理 4.2.**

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (n \geq 1)$$

フィボナッチ数列において上の式が成り立つ. この関係式をカッシーニの公式という.

**証明**

数学式帰納法を用いて示す.
$n = 1$ のとき
( 左辺 ) $= F_2F_0 - F_1^2 = -1$
( 右辺 ) $= (-1)^1 = -1$
となり, 成立する.
$n = k$ のとき

$$F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^k$$

が成立すると仮定する.
$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2 &= (F_{k+1} + F_k)F_k - F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}F_k + F_k^2 - F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}(F_{k+1} - F_{k-1}) + F_k^2 - F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}^2 - F_{k+1}F_{k-1} + F_k^2 - F_{k+1}^2 \\ &= -F_{k+1}F_{k-1} + F_k^2 \\ &= -(F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2) \\ &= (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

となる. したがって, すべての自然数 $n$ において

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (n \geq 1)$$

は成立する.

□

既述の教材において, フィボナッチ数列以外の数列では, このような教材はどのようになるのか検証した. そのために, カッシーニの公式について研究し, 教材の背景に何があるのかを理解することが望ましいと考えた. この教材で疑問に抱いたことを, 次にあげる.

- 何故, 面積の結果が $\pm 1$ されるのか.
- $\pm 1$ の 1 を他の数にするとこの教材はどのようになるのか.

この疑問を追究するために, この定理 4.2 に着目し, 次のことを考える.

- フィボナッチ数列ではない他の数列も同様に, このような関係式は存在するのか.
- 3 項間の関係式であるが隣接しない 3 項間でも何か規則が隠れているのか.

この論文では, 以下, 定理 4.2 を拡張していき, 最終的に定理 5.3 を得る.

定理 4.2 は $n+1, n, n-1$ の 3 項間内の関係式であった. $n$ を中心に $+1, -1$ となっており, これは $n$ を中心に 1 だけ開いていると解釈できる. では, 新しくパラメーターを加えて, $n$ を中心に $m$ だけ開くと, つまり $n+m, n, n-m$ の 3 項間ではどのような値になるのか考える. これをここでは,「カッシーニの公式 ($m$ 開き)」と呼ぶこととする. 実際, そのような関係式はすでに知られており, 次の定理が成立する.

**定理 4.3** (カッシーニの公式 ($m$ 開き ) $F_n$ ver.)**.**

$$F_{n+m}F_{n-m} - F_n^2 = (-1)^{n-m+1} \cdot F_m^2 \qquad (n \geq m)$$

ただし, $m \in \mathbb{N}$ とする.

カッシーニの公式 ($m$ 開き) を具体的に考えると, 例えば, 次のような計算結果になる. $m=2$ のとき, すなわち $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} F_4F_0 - F_2^2 &= 3 \times 0 - 1^2 = -1 \\ F_5F_1 - F_3^2 &= 5 \times 1 - 2^2 = 1 \\ F_6F_2 - F_4^2 &= 8 \times 1 - 3^2 = -1 \\ F_7F_3 - F_5^2 &= 13 \times 2 - 5^2 = 1 \end{aligned}$$

となり, $m=3$ のとき, すなわち $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} F_6F_0 - F_3^2 &= 8 \times 0 - 2^2 = -4 \\ F_7F_1 - F_4^2 &= 13 \times 1 - 3^2 = 4 \\ F_8F_2 - F_5^2 &= 21 \times 1 - 5^2 = -4 \\ F_9F_3 - F_6^2 &= 34 \times 2 - 8^2 = 4 \end{aligned}$$

となり, $m=4$ のとき, すなわち $n \geq 4$ のとき

$$\begin{aligned} F_8F_0 - F_4^2 &= 21 \times 0 - 3^2 = -9 \\ F_9F_1 - F_5^2 &= 34 \times 1 - 5^2 = 9 \\ F_{10}F_2 - F_6^2 &= 55 \times 1 - 8^2 = -9 \\ F_{11}F_3 - F_7^2 &= 89 \times 2 - 13^2 = 9 \end{aligned}$$

となっている. たしかに, 定理 4.3 のようになることがわかる.

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= 1^2 \cdot (-1)^n \\ F_{n+2}F_{n-2} - F_n^2 &= 1^2 \cdot (-1)^{n-1} \\ F_{n+3}F_{n-3} - F_n^2 &= 2^2 \cdot (-1)^n \\ F_{n+4}F_{n-4} - F_n^2 &= 3^2 \cdot (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

## 5 定理 4.2 の拡張

「カッシーニの公式」を拡張した「カッシーニの公式 ($m$ 開き )」という関係式は存在した. では, 他の数列でも同様な関係式が存在するのかをさらに追究していく. ここで一般の数列におけるカッシーニの公式 ($m$ 開き ) を調べるために数列を次のように定義する.

**定義 5.1.**

$$Y_0 = c,\ Y_1 = d,\ Y_{n+2} = x_1Y_{n+1} + x_2Y_n \quad (c, d, n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

ただし, $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ とする.

**補題 5.2.**

$$\alpha = \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4x_2}}{2},\ \beta = \frac{x_1 - \sqrt{x_1^2 + 4x_2}}{2}$$

とおくと, $Y_n$ の一般項は

$$Y_n = -\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + 4x_2}}\{x_2(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})c + (\beta^n - \alpha^n)d\}$$

となる.

ここから,

$$Y_{n+m}Y_{n-m} - Y_n^2$$

の値は何になるのかを $n$ の値をそれぞれ代入していき, 調べる. $m=1$ のときは, すなわち $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} Y_2Y_0 - Y_1^2 &= (x_1d + x_2c)c - d^2 \\ &= x_2c^2 + x_1cd - d^2 \\ Y_3Y_1 - Y_2^2 &= \{(x_1^2 + x_2)d + x_1x_2c\}d - (x_1d + x_2c)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2)d^2 + x_1x_2cd \\ &\quad -x_1^2d^2 - 2x_1x_2cd - x_2^2c^2 \\ &= -x_2^2c^2 - x_1x_2cd + x_2d^2 \\ &= -x_2(x_2c^2 + x_1cd - d^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Y_4Y_2 - Y_3^2 \\ = {} & \{(x_1^3 + 2x_1x_2)d + (x_1^2x_2 + x_2^2)c\}(x_1d + x_2c) \\ & -\{(x_1^2 + x_2)d + x_1x_2c\}^2 \\ = {} & x_2^3c^2 + x_1x_2^2cd - x_2^2d \\ = {} & x_2^2(x_2c^2 + x_1cd - d^2) \end{aligned}$$

となり, $m=1$ のときは

$$Y_{n+1}Y_{n-1} - Y_n^2 = (-1)^{n-1} \cdot x_2^{n-1} \cdot (x_2a^2 + x_1ab - b^2)$$

であると推測できる. $m=2$ のとおき, すなわち $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} Y_4Y_0 - Y_2^2 &= \{(x_1^3 + 2x_1x_2)d + (x_1^2x_2 + x_2^2)c\}c \\ &\quad -(x_1d + x_2c)^2 \\ &= (x_1^3 + 2x_1x_2)cd + (x_1^2x_2 + x_2^2)c^2 \\ &\quad -(x_1^2d^2 + 2x_1x_2cd + x_2^2c^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1^2x_2c^2 + x_1^3cd - x_1^2d^2 \\
&= x_1^2(x_2c^2 + x_1cd - d^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_5Y_1 - Y_3^2 &= \{(x_1^4 + 3x_1^2x_2 + x_2^2)d + (x_1^3x_2 + 2x_1x_2^2)c\}d \\
&\quad -\{(x_1^2 + x_2)d + x_1x_2c\}^2 \\
&= x_1^2x_2d^2 - x_1^3x_2cd - x_1^2x_2^2c^2 \\
&= -x_1^2x_2(x_2c^2 + x_2cd - d^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Y_6Y_2 - Y_4^2 \\
= \ &\{(x_1^5 + 4x_1^3x_2 + 3x_1x_2^2)d + (x_1^4x_2 + 3x_1^2x_2^2 + x_2^3)c\} \times \\
&(x_1d + x_2c) - (x_1d + x_2c)^2 \\
= \ &x_1^2x_2^2(x_2c^2 + x_1cd - d^2)
\end{aligned}
$$

となり, $m = 2$ のときは

$$Y_{n+2}Y_{n-2} - Y_n^2 = (-1)^{n-2} \cdot x_1^2 \cdot x_2^{n-2} \cdot (x_2c^2 + x_1cd - d^2)$$

であると推測できる. 続いて $m = 3$ のとき, すなわち $n \geq 3$ のとき

$$
\begin{aligned}
&Y_6Y_0 - Y_3^2 \\
= \ &\{(x_1^5 + 4x_1^3x_2 + 3x_1x_2^2)d + (x_1^4x_2 + 3x_1^2x_2^2 + x_2^3)c\}c \\
&-\{(x_1^2 + x_2)d + x_1x_2c\}^2 \\
= \ &(x_1^5 + 4x_1^3x_2 + 3x_1x_2^2)cd + (x_1^4x_2 + 3x_1^2x_2^2 + x_2^3)c^2 \\
&-(x_1^2 + x_2)^2d^2 - 2x_1x_2(x_1^2 + x_2)cd - x_1^2x_2^2c^2 \\
= \ &(x_1^4x_2 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^3)c^2 + (x_1^5 + 2x_1^3x_2 + x_1x_2^2)cd \\
&-(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + x_2^2)d^2 \\
= \ &x_2(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + x_2^2)c^2 + x_1(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + x_2^2)cd \\
&-(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + x_2^2)d^2 \\
= \ &(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + x_2^2) \cdot (x_2c^2 + x_1cd - d^2) \\
= \ &(x_1^2 + x_2)^2 \cdot (x_2c^2 + x_1cd - d^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Y_7Y_1 - Y_4^2 \\
= \ &\{(x_1^6 + 5x_1^4x_2 + 6x_1^2x_2^2 + x_2^3)d + (x_1^5x_2 + 4x_1^3x_2^2 \\
&+3x_1x_2^3)c\}d - \{(x_1^3 + 2x_1x_2)d + (x_1^2x_2 + x_2^2)c\}^2 \\
= \ &(x_1^4x_2 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^3)d^2 + (x_1^5x_2 + 4x_1^3x_2^2 + 3x_1x_2^3)cd \\
&-(2x_1^5x_2 + 6x_1^3x_2^2 + 4x_1x_2^3)cd - x_2^2(x_1^2 + x_2)^2c^2 \\
= \ &-x_2^2(x_1^2 + x_2)^2c^2 - (x_1^5x_2 + 2x_1^3x_2^2 + x_1x_2^3)cd \\
&+x_2(x_1^2 + x_2)^2d^2 \\
= \ &-x_2^2(x_1^2 + x_2)^2c^2 - x_1x_2(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + x_2^2)cd \\
&+x_2(x_1^2 + x_2)^2d^2 \\
= \ &-x_2(x_1^2 + x_2)^2 \cdot (x_2c^2 + x_2cd - d^2)
\end{aligned}
$$

となり, $m = 3$ のときは

$$Y_{n+3}Y_{n-3} - Y_n^2 = (-1)^{n-3} \cdot (x_1^2 + x_2)^2 \cdot x_2^{n-3} \cdot (x_2c^2 + x_1cd - d^2)$$

であると推測できる.

上記の計算実験より, どの $m$ においても $x_2c^2 + x_1cd - d^2$ という項が現れているので

$$I = x_2c^2 + x_1cd - d^2$$

とおき, これまで調べたことを見比べると

$$
\begin{aligned}
Y_{n+1}Y_{n-1} - Y_n^2 &= (-1)^{n-1} \cdot x_2^{n-1} \cdot I \\
Y_{n+2}Y_{n-2} - Y_n^2 &= (-1)^{n-2} \cdot x_1^2 \cdot x_2^{n-2} \cdot I \\
Y_{n+3}Y_{n-3} - Y_n^2 &= (-1)^{n-3} \cdot (x_1^2 + x_2)^2 \cdot x_2^{n-3} \cdot I
\end{aligned}
$$

数列 $\{Y_n\}$ の一般項の $d$ の係数を $J_n$ とする.

補題 5.2 より上述した数列 $\{Y_n\}$ の一般項の $d$ の係数を $J_n$ の正体は $t = \sqrt{x_1^2 + 4x_2}$ とおくと

$$J_n = -\frac{1}{t}(\beta^n - \alpha^n) = -\frac{\beta^n - \alpha^n}{\sqrt{x_1^2 + 4x_2}}$$

であると判明した. これより, 次の定理を証明する.

**定理 5.3** (カッシーニの公式 ($m$ 開き ) 一般化 ver.)**.**

$$Y_{n+m}Y_{n-m} - Y_n^2 = (-1)^{n-m} \cdot x_2^{n-m} \cdot J_m^2 \cdot (x_2c^2 + x_1cd - d^2)$$

となる. ただし,

$$\alpha = \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4x_2}}{2}, \ \beta = \frac{x_1 - \sqrt{x_1^2 + 4x_2}}{2}$$

$$J_n = -\frac{\beta^n - \alpha^n}{\sqrt{x_1^2 + 4x_2}}$$

とする.

**証明**

数列 $\{Y_n\}$ の一般項を上記の関係式の左辺に代入し, 整理すると右辺と一致することで等式を示す. $t = \sqrt{x_1^2 + 4x_2}$ とおく. 補題 5.2 より

$$
\begin{aligned}
&Y_{n+m}Y_{n-m} \\
= \ &\frac{1}{t^2}\{x_2^2(\beta^{n+m-1} - \alpha^{n+m-1})(\beta^{n-m-1} - \alpha^{n-m-1})c^2 \\
&+x_2(\beta^{n+m-1} - \alpha^{n+m-1})(\beta^{n-m} - \alpha^{n-m})cd \\
&+x_2(\beta^{n-m-1} - \alpha^{n-m-1})(\beta^{n+m} - \alpha^{n+m})cd \\
&+x_2(\beta^{n+m} - \alpha^{n+m})(\beta^{n-m} - \alpha^{n-m})d^2\}
\end{aligned}
$$

となる. この計算で出てくる $\frac{1}{t^2}$ を除いた $c^2, cd, d^2$ の係数を次のように $h_1, h_2, h_3, h_4$ とおく. つまり,

$$
\begin{aligned}
h_1 &= x_2^2(\beta^{n+m-1} - \alpha^{n+m-1})(\beta^{n-m-1} - \alpha^{n-m-1}) \\
h_2 &= x_2(\beta^{n+m-1} - \alpha^{n+m-1})(\beta^{n-m} - \alpha^{n-m}) \\
h_3 &= x_2(\beta^{n-m-1} - \alpha^{n-m-1})(\beta^{n+m} - \alpha^{n+m}) \\
h_4 &= (\beta^{n+m} - \alpha^{n+m})(\beta^{n-m} - \alpha^{n-m})
\end{aligned}
$$

とする. それぞれの値を計算すると次のようになる.

$$
\begin{aligned}
h_1 &= x_2^2(\beta^{n+m-1} - \alpha^{n+m-1})(\beta^{n-m-1} - \alpha^{n-m-1}) \\
&= x_2^2(\beta^{2n-2} - \beta^{n+m-1} \cdot \alpha^{n-m-1} - \alpha^{n+m-1} \cdot \beta^{n-m-1} \\
&\quad +\alpha^{2n-2}) \\
&= x_2^2(\alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2} - \beta^{n-m-1} \cdot \beta^{2m} \cdot \alpha^{n-m-1} \\
&\quad -\alpha^{n-m-1} \cdot \alpha^{2m} \cdot \beta^{n-m-1})
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= x_2^2\{\alpha^{2n-2}+\beta^{2n-2}-(\alpha\beta)^{n-m-1}\cdot\beta^{2m}\\
&\quad -(\alpha\beta)^{n-m-1}\cdot\alpha^{2m}\}\\
&= x_2^2\{\alpha^{2n-2}+\beta^{2n-2}-(-x_2)^{n-m-1}\cdot\alpha^{2m}\\
&\quad -(-x_2)^{n-m-1}\cdot\beta^{2m}\}\\
&= x_2^2\{\alpha^{2n-2}+\beta^{2n-2}\\
&\quad +(-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m-1}\cdot(\alpha^{2m}+\beta^{2m})\}\\
h_2 &= x_2(\beta^{n+m-1}-\alpha^{n+m-1})(\beta^{n-m}-\alpha^{n-m})\\
&= x_2(\beta^{2n-1}-\beta^{n+m-1}\cdot\alpha^{n-m}-\alpha^{n+m-1}\cdot\beta^{n-m}\\
&\quad +\alpha^{2n-1})\\
&= x_2\{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}-\beta^{n-m}\cdot\beta^{2m-1}\cdot\alpha^{n-m}\\
&\quad -\alpha^{n-m}\cdot\alpha^{2m-1}\cdot\beta^{n-m}\}\\
&= x_2\{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}-(\alpha\beta)^{n-m}\cdot\beta^{2m-1}\\
&\quad -(\alpha\beta)^{n-m}\cdot\alpha^{2m-1}\}\\
&= x_2\{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}-(-x_2)^{n-m}\cdot\alpha^{2m-1}\\
&\quad -(-x_2)^{n-m}\cdot\beta^{2m-1}\}\\
&= x_2\{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}\\
&\quad +(-1)^{n-m+1}\cdot x_2^{n-m}\cdot(\alpha^{2m-1}+\beta^{2m-1})\}\\
h_3 &= x_2(\beta^{n-m-1}-\alpha^{n-m-1})(\beta^{n+m}-\alpha^{n+m})\\
&= x_2(\beta^{2n-1}-\beta^{n-m-1}\cdot\alpha^{n+m}-\alpha^{n-m-1}\cdot\beta^{n+m}\\
&\quad +\alpha^{2n-1})\\
&= x_2\{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}-\beta^{n-m-1}\cdot\alpha^{n-m-1}\cdot\alpha^{2m+1}\\
&\quad -\alpha^{n-m-1}\cdot\beta^{n-m-1}\cdot\beta^{2m+1}\}\\
&= x_2\{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}-(\alpha\beta)^{n-m-1}\cdot\alpha^{2m+1}\\
&\quad -(\alpha\beta)^{n-m-1}\cdot\beta^{2m+1}\}\\
&= x_2\{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}-(-x_2)^{n-m-1}\cdot\alpha^{2m+1}\\
&\quad -(-x_2)^{n-m-1}\cdot\beta^{2m+1}\}\\
&= x_2\{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}\\
&\quad +(-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m-1}\cdot(\alpha^{2m+1}+\beta^{2m+1})\}\\
h_4 &= (\beta^{n+m}-\alpha^{n+m})(\beta^{n-m}-\alpha^{n-m})\\
&= \beta^{2n}-\beta^{n+m}\cdot\alpha^{n-m}-\alpha^{n+m}\cdot\beta^{n-m}+\alpha^{2n})\\
&= \alpha^{2n}+\beta^{2n}-\beta^{n-m}\cdot\beta^{2m}\cdot\alpha^{n-m}\\
&\quad -\alpha^{n-m}\cdot\alpha^{2m}\cdot\beta^{n-m}\\
&= \alpha^{2n}+\beta^{2n}-(\alpha\beta)^{n-m}\cdot\beta^{2m}-(\alpha\beta)^{n-m}\cdot\alpha^{2m}\}\\
&= \alpha^{2n}+\beta^{2n}-(-x_2)^{n-m}\cdot\alpha^{2m}-(-x_2)^{n-m}\cdot\beta^{2m}\\
&= \alpha^{2n}+\beta^{2n}+(-1)^{n-m+1}\cdot x_2^{n-m}\cdot(\alpha^{2m}+\beta^{2m})
\end{aligned}$$

これらより

$$Y_{n+m}Y_{n-m}=\frac{1}{t^2}(h_1c^2+h_2cd+h_3cd+h_4d^2)$$

である. 一方, 次に $-Y_n^2$ を計算する.

$$\begin{aligned}
&-Y_n^2\\
&= -\frac{1}{t^2}\{x_2(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})c+(\beta^n-\alpha^n)d\}^2\\
&= -\frac{1}{t^2}\{x_2^2(\beta^{2n-2}+\alpha^{2n-2}-2(\alpha\beta)^{n-1})c^2\\
&\quad +2x_2(\beta^{2n-1}-\alpha^n\cdot\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\cdot\beta^n+\alpha^{2n-1})cd\\
&\quad +(\beta^{2n}+\alpha^{2n}-2(\alpha\beta)^n)d^2\}\\
&= -\frac{1}{t^2}\{x_2^2(\alpha^{2n-2}+\beta^{2n-2}-2(-x_2)^{n-1})c^2\\
&\quad +2x_2(\beta^{2n-1}-(\alpha\beta)^{n-1}\cdot\alpha-(\alpha\beta)^{n-1}\cdot\beta+\alpha^{2n-1})cd\\
&\quad +(\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2(-x_2)^n)d^2\}\\
&= -\frac{1}{t^2}\{x_2^2(\alpha^{2n-2}+\beta^{2n-2}-2(-x_2)^{n-1})c^2\\
&\quad +2x_2(\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}-(-x_2)^{n-1}\alpha-(-x_2)^{n-1}\beta)cd\\
&\quad +(\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2(-x_2)^n)d^2\}
\end{aligned}$$

これより

$$Y_{n+m}Y_{n-m}-Y_n^2$$

を求めるとき, $c^2, cd, d^2$ の係数を順に計算していく. ただし, この計算では $\frac{1}{t^2}$ を省略して計算する.

$$\begin{aligned}
&h_1-x_2^2\{\alpha^{2n-2}+\beta^{2n-2}-2(-x_2)^{n-1}\}\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m+1}\cdot(\alpha^{2m}+\beta^{2m})+2\cdot(-x_2)^{n-1}x_2^2\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m+1}\cdot(\alpha^{2m}+\beta^{2m})\\
&\quad +2\cdot(-1)^{n-1}\cdot x_2^{n+1}\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m+1}\cdot(\alpha^{2m}+\beta^{2m})\\
&\quad +2\cdot(-1)^{n-m}\cdot(-1)^{m-1}\cdot x_2^{n-m+1}\cdot x_2^m\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m+1}\cdot\{\alpha^{2m}+\beta^{2m}\\
&\quad +2\cdot(-1)^{m-1}\cdot x_2^m\}\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m+1}\cdot\{\alpha^{2m}+\beta^{2m}\\
&\quad +2\cdot(-1)^m\cdot(-1)^{-1}\cdot x_2^m\}\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m+1}\cdot\{\alpha^{2m}-2\cdot(-x_2)^m+\beta^{2m}\}\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m+1}\cdot\{\alpha^{2m}-2\cdot(\alpha\beta)^m+\beta^{2m}\}\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m+1}\cdot(\alpha^m-\beta^m)^2\\
&h_2+h_3-2x_2\{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}\\
&\quad -(-x_2)^{n-1}\cdot\alpha-(-x_2)^{n-1}\cdot\beta\}\\
&= (-1)^{n-m+1}\cdot x_2^{n-m+1}\cdot(\alpha^{2m-1}+\beta^{2m-1})\\
&\quad +(-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m}\cdot(\alpha^{2m+1}+\beta^{2m+1})\\
&\quad +2x_2\cdot(-x_2)^{n-1}\cdot(\alpha+\beta)\\
&= -x_2\cdot(-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m}\cdot(\alpha^{2m-1}+\beta^{2m-1})\\
&\quad +(-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m}\cdot(\alpha^{2m+1}+\beta^{2m+1})\\
&\quad -2x_2^n\cdot(-1)^n\cdot(\alpha+\beta)\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m}\cdot(-x_2\alpha^{2m-1}-x_2\beta^{2m-1}+\alpha^{2m+1}\\
&\quad +\beta^{2m+1})-2x_2^{n-m}\cdot x_2^m\cdot(-1)^{n-m}\cdot(-1)^m\cdot(\alpha+\beta)\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m}\cdot(-x_2\alpha^{2m-1}-x_2\beta^{2m-1}\\
&\quad +\alpha^{2m-1}\cdot\alpha^2+\beta^{2m-1}\cdot\beta^2)\\
&\quad -x_2^{n-m}\cdot(-1)^{n-m}\cdot 2\cdot(-x_2)^m\cdot(\alpha+\beta)\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m}\cdot\{(\alpha^{2m-1}\cdot(\alpha^2-x_2)\\
&\quad +\beta^{2m-1}\cdot(\beta^2-x_2)-2\cdot(\alpha\beta)^m\cdot(\alpha+\beta)\}\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m}\cdot\{(\alpha^{2m-1}\cdot x_1\alpha\\
&\quad +\beta^{2m-1}\cdot x_1\beta-2\cdot(\alpha\beta)^m\cdot x_1\}\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m}\cdot x_1\cdot\{(\alpha^{2m}-2\cdot(\alpha\beta)^m+\beta^{2m}\}\\
&= (-1)^{n-m}\cdot x_2^{n-m}\cdot x_1\cdot(\alpha^m-\beta^m)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& h_4 - \{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(-x_2)^n\} \\
= \;& (-1)^{n-m+1} \cdot x_2^{n-m} \cdot (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) + 2 \cdot (-x_2)^n \\
= \;& (-1)^{n-m+1} \cdot x_2^{n-m} \cdot (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) + 2 \cdot (-1)^n \cdot x_2^n \\
= \;& (-1)^{n-m+1} \cdot x_2^{n-m} \cdot (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) \\
& +2 \cdot (-1)^{n-m+1} \cdot (-1)^{m-1} \cdot x_2^{n-m} \cdot x_2^m \\
= \;& (-1)^{n-m+1} \cdot x_2^{n-m} \cdot \{\alpha^{2m} + \beta^{2m} \\
& +2 \cdot (-1)^{m-1} \cdot x_2^m\} \\
= \;& (-1)^{n-m+1} \cdot x_2^{n-m} \cdot \{\alpha^{2m} + \beta^{2m} \\
& +2 \cdot (-1)^m \cdot (-1)^{-1} \cdot x_2^m\} \\
= \;& (-1)^{n-m+1} \cdot x_2^{n-m} \cdot \{\alpha^{2m} - 2 \cdot (-x_2)^m + \beta^{2m}\} \\
= \;& (-1)^{n-m+1} \cdot x_2^{n-m} \cdot \{\alpha^{2m} - 2 \cdot (\alpha\beta)^m + \beta^{2m}\} \\
= \;& (-1)^{n-m+1} \cdot x_2^{n-m} \cdot (\alpha^m - \beta^m)^2
\end{aligned}
$$

したがって, $Y_{n+m}Y_{n-m} - Y_n^2$ にそれぞれの値を代入すると

$$
\begin{aligned}
& Y_{n+m}Y_{n-m} - Y_n^2 \\
= \;& \frac{1}{t^2}\{(-1)^{n-m} \cdot x_2^{n-m+1} \cdot (\alpha^m - \beta^m)^2 \cdot c^2 \\
& +(-1)^{n-m} \cdot x_2^{n-m} \cdot x_1 \cdot (\alpha^m - \beta^m)^2 \cdot cd \\
& +(-1)^{n-m+1} \cdot x_2^{n-m} \cdot (\alpha^m - \beta^m)^2 \cdot d^2\} \\
= \;& \frac{1}{t^2}\{(-1)^{n-m} \cdot x_2^{n-m} \cdot x_2 \cdot (\alpha^m - \beta^m)^2 \cdot c^2 \\
& +(-1)^{n-m} \cdot x_2^{n-m} \cdot x_1 \cdot (\alpha^m - \beta^m)^2 \cdot cd \\
& -(-1)^{n-m} \cdot x_2^{n-m} \cdot (\alpha^m - \beta^m)^2 \cdot d^2\} \\
= \;& \frac{(\alpha^m - \beta^m)^2}{t^2} \cdot (-1)^{n-m} \cdot x_2^{n-m} \cdot (x_2c^2 + x_1cd - d^2) \\
= \;& (-1)^{n-m} \cdot x_2^{n-m} \cdot \frac{-(\beta^m - \alpha^m)^2}{t^2} \cdot (x_2c^2 + x_1cd - d^2) \\
= \;& (-1)^{n-m} \cdot x_2^{n-m} \cdot \{-\frac{\beta^m - \alpha^m}{t}\}^2 \cdot (x_2c^2 + x_1cd - d^2) \\
= \;& (-1)^{n-m} \cdot x_2^{n-m} \cdot J_m^2 \cdot (x_2c^2 + x_1cd - d^2)
\end{aligned}
$$

□

この証明より, $c = 0, d = 1, x_1 = 1, x_2 = 1$ とすると定理 4.3 も示された.

## 6　定理 5.3 から教材を考える

定理 5.3 から, 生じた疑問は解決できる. この定理 5.3 を使うことで, 面積の結果が $\pm1$ に限らず他の数列の場合を考えることができる. 例えば, $c = 2, d = 1, x_1 = 1, x_2 = 1$ としたとき, $\{Y_n\}$ はリュカ数列 $\{L_n\}$ になる.

**定義 6.1.** 次の数列をリュカ数列とする.

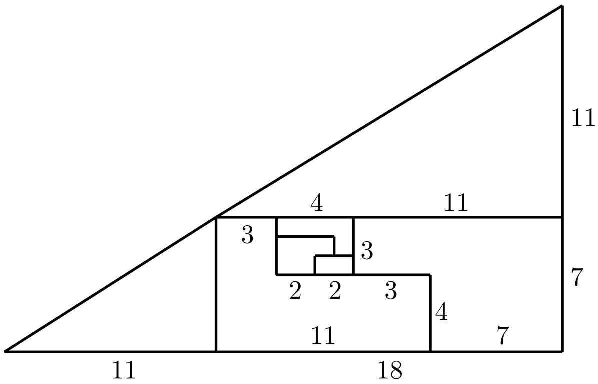
$$L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_n$ | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 | 123 |

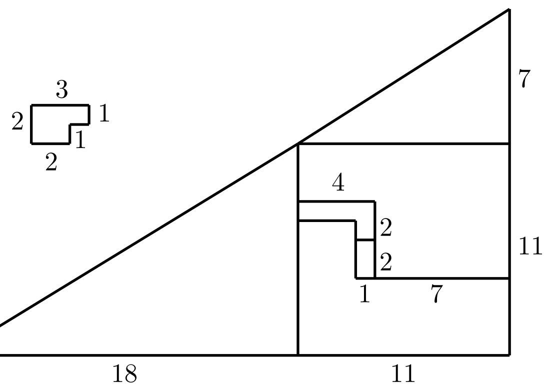
$m = 1$ とすると,

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5 \cdot (-1)^n \quad (n \geq 1)$$

となり, 右辺が $\pm5$ である. では, 面積が $\pm5$ となるような教材を考えると, 例えば, 下図のようになる.




例にあげた上図は, すべてリュカ数に限定して切り分けてみたものである. 長方形の切り方は, これ以外にも存在するため, 様々な切り分け方を子ども達と一緒に考えて活動することで, この教材の面白さはさらに深まるだろう.
上図を, フィボナッチ数列の場合の直角三角形の並び替えと同様に並び替えたものが下図である.




面積 5 だけ余る様子が見られる. ただ, リュカ数列で直角三角形の並び替えを考えるとき, フィボナッチ数列のときより, 直角三角形の斜辺の傾きの誤差が目立ってしまう.

$$
\begin{aligned}
\text{左の直角三角形} &= \frac{11}{18} = 0.611111 \\
\text{右の直角三角形} &= \frac{7}{11} = 0.636363
\end{aligned}
$$

リュカ数のときの傾きの誤差は約 0.0252 である. しかし, 既述したフィボナッチ数列の直角三角形の並び替えのときは

$$
\begin{aligned}
\text{左の直角三角形} &= \frac{3}{8} = 0.375 \\
\text{右の直角三角形} &= \frac{5}{13} = 0.3846153
\end{aligned}
$$

であり, この場合の傾きの誤差を計算したところ, 約 0.0096 であった. この教材は大きい直角三角形に見えることが前提のトリックであるので, 誤差が大きいと斜辺が一直線ではなく四角形のように見えてしまい, この教材は不思議な現象と

感じられないものとなってしまう．誤差の差は，約 0.0156 である．傾きの誤差が 0.01 を超えてしまうと，目の錯覚で直角三角形に見えるというトリックが活かせないのではないかと調べてみてわかった．逆に，傾きの誤差が 0.01 を超えないような数列を選べば，長方形の切り分けを自由に決め，「直角三角形の並び替え」をすることができ，不思議な現象を実演することができる．その例として，フィボナッチ数列とは漸化式の構造を変え，次のような数列をあげる．

**定義 6.2.** 次の数列をペル数列という．

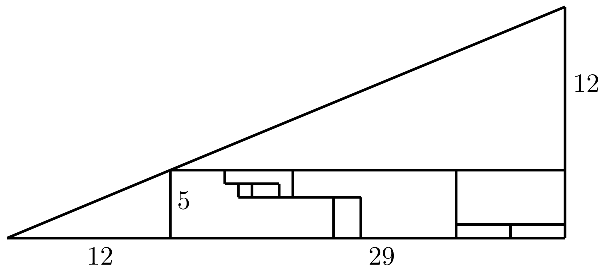
$$P_0 = 0,\ P_1 = 1,\ P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_n$ | 0 | 1 | 2 | 5 | 12 | 29 | 70 | 169 | 408 | 985 |

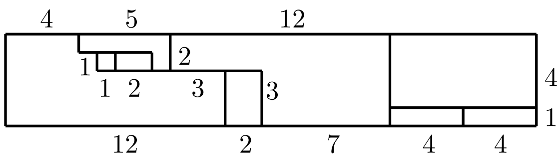
これは，定理 5.3 の $c = 0, d = 1, x_1 = 2, x_2 = 1, m = 1$ を代入したものであり，

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n\ (n \geq 1)$$

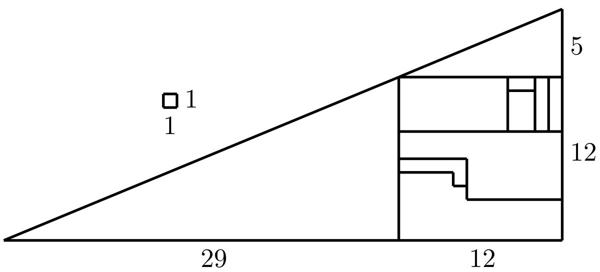
となる．このことから，フィボナッチ数列と同様，面積の差が 1 になる数列である．切り分けの一つして，下図のようなものがある．




ここで，本稿では図が小さくなってしまったため，長方形の切り分けを拡大して記載する．




この上図を並び替えると下図のようになり，面積 1 の正方形が一つ余る．




このときの傾きを調べると

$$\text{左の直角三角形} = \frac{5}{12} = 0.416666$$

$$\text{右の直角三角形} = \frac{12}{29} = 0.413793$$

となっており，傾きの誤差は約 0.0028 である．ただ，この長方形の切り分け方は他にも存在するので，上図は例の一つであり，もっと工夫された切り分け方が存在するかもしれない．定理 5.3 から様々な数列におけるものを見つけ出し，新しい別の教材を見つけることができる．このことから，子ども達に自分の好きなように切り分けて，実際に作ってみるという活動をしてもおもしろいだろう．実際，私自身この切り分けをするとき，ちょうどぴったり正方形になるように一つ一つのピースを切るにはどうすればよいのかを考えるのに苦労した．図形の敷き詰めのように捉えることもできるので，どのように長方形を正方形に敷き詰めるのかを考えさせると，様々な子ども達の考えが出てきて，子ども達同士で理解が深まる．

チョコレート問題のときはどうなるのかを考えてみたが，リュカ数列では面積の差が ±5 であるため，正方形から長方形への並び替えでは目の錯覚で不思議な現象が見えることはなく，大きい隙間が空いてしまう．このことから，チョコレート問題においては面積の差が ±1 となる数列を選ぶべきである．そのような数列を選んだが，フィボナッチ数列のような正方形から長方形に見せる切り分け方の規則を模索中である．今後は，チョコレート問題の切り分け方の規則性について考えていきたい．また，直角三角形の並び替えにおいて，他の様々な数列でも作ることは可能であることがわかったため，「フィボナッチ数以外の数では，どのような結果になるのか」と発展させて，子ども達と教材の背景について取り組みたい．

## おわりに

本稿では，子ども達が興味を持つであろう図形の並び替えから生じる不思議な現象の教材の背景を考察した．一般に有名な図の例として，フィボナッチ数のときがあげられるが，定理 5.3 から他の数列のときも同様に考えることができるということが分かった．様々な図を用いて，この教材を発展させ，今後さらに今までと異なった点を追究することのできるよう，教材研究を考えていきたい．

## 参考文献

[1] T.Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley-Interscience, New York, 2001.

[2] T.Koshy, Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications, Springer, New York, 2014.